向量相关性

线性相关

判断线性相关：

- 定义：$k_1\alpha_1+\ldots+k_n\alpha_n=\theta$，解方程组有非零解
- 矩阵的秩：$r(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)<n \Leftrightarrow$ 相关
- 性质：个数>维数相关；行列式=0相关

已知：$\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix},$

分别(1)用定义;(2)用秩;(3)用行列式判断相关性.

线性相关性质：

- 向量组相关⇔必有向量可由其它向量表示
- 无关向量组加新向量后相关，则新向量可由向量组唯一表示
- 初等行变换不改变列向量组的相关性

极大无关组

判断极大无关组：

- 定义： **(1)** 无关 **(2)** 加任一向量相关
- 等价判别：**(1)**无关 **(2)**可表示任一向量

计算极大无关组：用初等行变换简化列向量组

已知：$\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-9\\-6\\9\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

求一个极大无关组，并用极大无关组表示其它向量**.**

极大无关组和矩阵秩的性质：

- $\boldsymbol{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$可被$\boldsymbol{\beta_1,\ldots,\beta_m}$表示，则$\mathbf{r}\{\boldsymbol{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\}\le\mathbf{r}\{\boldsymbol{\beta_1,\ldots,\beta_m}\}$
- 等价向量组秩相等
- 行秩=列秩=矩阵的秩
- $\mathbf{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\le\mathbf{r}(\boldsymbol{A})+\mathbf{r}(\boldsymbol{B})$
- $\mathbf{r}(\boldsymbol{A})+\mathbf{r}(\boldsymbol{B})-\boldsymbol{n}\le\mathbf{r}(\boldsymbol{AB})\le\min\{\mathbf{r}(\boldsymbol{A}),\mathbf{r}(\boldsymbol{B})\}$

解方程组

齐次方程组的解

齐次方程组$Ax=\theta$ (n个未知量)有非零解的判别：

- r(A)<n
- $|A|=0$
- A行数<列数
- A的列向量线性相关

求齐次方程组的基础解系：初等行变换到行简化梯形B再求解

- B的非零行最左端的1所在列在B的左边：
  其它列取负下接基本向量组
- B的其它列在有些最左端1的左边
  其它列对应变量取基本向量组所得解

求如下方程组的基础解系：

$$(1)\begin{cases}2x_1+3x_2-5x_3+x_4=0,\\3x_1+3x_2+x_3+3x_4=0,\\x_1+6x_2-28x_3-4x_4=0.\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}x_1+3x_2-2x_3+x_4=0,\\2x_1+6x_2-4x_3+3x_4=0,\\3x_1+9x_2-6x_3-4x_4=0.\end{cases}$$

非齐次方程组的解

方程组$Ax=b$ (n个未知量)有解性判断：

- $r(A)<r(A,b)$：无解
- $r(A)=r(A,b)=n$：有唯一解
- $r(A)=r(A,b)<n$：有无穷多组解

求非齐次方程组的通解：

初等行变换增广矩阵到行简化梯形，求特解求基础解系

求如下方程组的通解：

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+3x_3+5x_4=-3, \\ 2x_1+5x_2+x_3-x_4=7. \end{cases}$$

基础解系与系数矩阵的秩

方程组$Ax=\theta$ (n个未知量)基础解系构成的矩阵$N(A)$

满足：$r(A)+r(N(A))=n$

求特征值特征向量

计算特征值特征向量

- 计算 $|\lambda E\text{-}A|=0$，求得特征值λ
- 对各个特征值λ计算 $(\lambda E\text{-}A)\xi=0$，求特征向量$\xi$

$$求\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}的特征值和特征向量.$$

利用定义 $A\xi=\lambda\xi$ 求特征值特征向量

$$求\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}的特征值和特征向量.$$

相似矩阵性质

若$A\sim B$，则有：

- $|A|=|B|$，$A^{-1}\sim B^{-1}$，$A^n\sim B^n$，$kA\sim kB$
- $f(A)\sim f(B)$，其中$f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$
- 特征值相等
- $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$

矩阵对角化

可对角化

判断n阶方阵A可对角化：

- 定义：存在P使得$P^{-1}AP$=对角矩阵
- A有n个无关特征向量
- A的特征值互不相同
- A的每个特征值的无关特征向量等于特征值重数

n阶矩阵A对角化步骤：

1. 计算特征值：解特征方程 $|\lambda E-A|=0$
2. 对每个特征值求出无关特征向量
3. 全部特征向量构成变换矩阵P使得$P^{-1}AP$=对角矩阵

判断 $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 是否可对角化，若是则进行对角化.

特征向量性质：

- 不同特征值的特征向量无关
- 每个特征值的无关特征向量放在一起仍然无关
- 某特征值无关特征向量的个数≤特征值的重数

实对称矩阵的对角化

施密特正交化

无关向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$，可通过下列公式构造出正交向量组：

$$\xi_1=\alpha_1,$$

$$\xi_i=\alpha_i-\frac{(\alpha_i,\xi_1)}{(\xi_1,\xi_1)}\xi_1-\frac{(\alpha_i,\xi_2)}{(\xi_2,\xi_2)}\xi_2-\cdots-\frac{(\alpha_i,\xi_{i-1})}{(\xi_{i-1},\xi_{i-1})}\xi_{i-1}, i=2,3,\cdots,n.$$

正交向量组$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$，可通过单位化构造出标准正交向量组：

$$\beta_i=\frac{1}{\|\xi_i\|}\xi_i=\frac{1}{\sqrt{(\xi_i,\xi_i)}}\xi_i, i=1,2,\cdots,n.$$

将无关向量组标准正交化：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\0\\2\\-4\end{pmatrix}$$

实对称矩阵对角化

特征值特征向量性质：

- 特征值均为实数
- 不同特征值的特征向量正交

实对称矩阵可正交对角化.

***n*阶实对称矩阵*A*正交对角化步骤：**

1. 计算特征值：解特征方程 $|\lambda E-A|=0$
2. 对每个特征值求出无关特征向量，标准正交化
3. 特征向量构成正交变换矩阵P使得$P^{T}AP$=对角矩阵

将矩阵 $A=\begin{pmatrix}10 & -2 & 2\\ -2 & 10 & 2\\ 2 & 2 & 10\end{pmatrix}$正交对角化.