

数 学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分,第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡的相应位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | \ln(1-x) \leq 0\}$, 集合 $B = \{x | \frac{1}{x} \leq 1\}$. 则集合 $A \cup B =$

- (A) R (B) $(0, +\infty)$ (C) $[0, +\infty)$ (D) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

2. 已知复数 z 满足 $z + i = (z - i)(1 + i)$ (i 为虚数单位), 则 $|z| =$

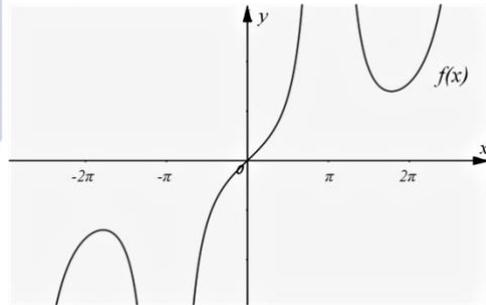
- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{5}$

3. 已知向量 $\mathbf{a} = (2, t+2)$, $\mathbf{b} = (t-1, t+1)$, 则“向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 夹角为钝角”是“ $-5 < t < 0$ ”的

- (A) 充要条件 (B) 充分不必要条件 (C) 必要不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

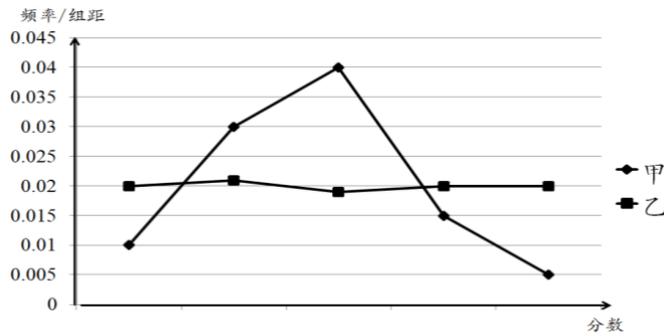
4. 已知 $f(x)$ 的图像如右图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能是

- (A) $\frac{x+\sin x}{\cos x}$
 (B) $\frac{x+\sin x}{\cos x - |x|}$
 (C) $\frac{\sin x}{\cos x - |x|}$
 (D) $\frac{x+\sin x}{1+\cos x}$



5. 学校为了增强学生对体育的重视,了解学生体能情况,对甲、乙两班同学进行了体能测试,汇总得到的两班同学体能测试成绩的频率分布折线图如下图. 已知两班人数相同,且甲班同学

体能测试成绩的方差为 D_1 , 乙班同学体能测试成绩的方差为 D_2 , 则由下图可知



- (A) $D_1 < D_2$ (B) $D_1 > D_2$ (C) $D_1 = D_2$ (D) D_1 和 D_2 的大小无法判断

6. 已知函数 $f(x) = x + \ln ax$ 的图像在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $y = 3x - 1$, 则

- (A) $x_0 = 1, a = e$ (B) $x_0 = 1, a = 1$ (C) $x_0 = e^{-1}, a = e$ (D) $x_0 = e^{-1}, a = 1$

7. 用数字0,1,2,10组成一个五位数, 每个数字只使用一次, 最多能组成的不同五位数个数为

- (A) 24 (B) 18 (C) 15 (D) 12

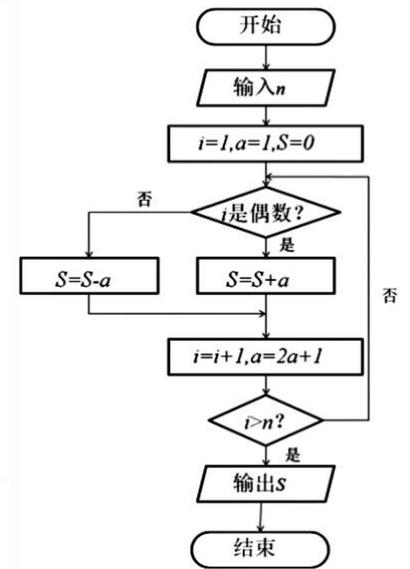
8. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 有且仅有1个零点, 则 $\omega (\omega > 0)$ 的取值范围为

- (A) $[\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ (B) $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}]$

- (C) $[\frac{9}{4}, \frac{15}{2})$ (D) $(\frac{9}{4}, \frac{15}{2}]$

9. 执行右图的程序框图, 已知输入的 n 为10, 则输出的结果为

- (A) 341 (B) 682
(C) 1023 (D) 2036



10. 已知椭圆 $C: x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 1)$, 点 $A(0,2)$, 点 B 是 C 上一点, 直线 l 是 C 在点 B 处的切线. 已知有且仅有4个不同的点 B 使得 $AB \perp l$, 则 b 的取值范围为

- (A) $(0, \sqrt{2} - 1)$ (B) $(0, \sqrt{3} - 1)$

- (C) $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{3} - 1)$ (D) $(\sqrt{3} - 1, 1)$

11. 已知在三棱锥 $P - ABC$ 中, $PB \perp$ 平面 APC , $\angle BAC = 60^\circ$, 且 $2 \sin \angle PAC = \sin \angle APC$. 则直线 AB 与平面 APC 所成角度的余弦值的最大值为

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

12. 已知 $a = 0.99 \ln 0.99$, $b = e^{0.01} - 1.02$, $c = \sin 0.01 - 0.02$, 则

- (A) $c < b < a$ (B) $c < a < b$ (C) $a < c < b$ (D) $b < c < a$

第II卷(非选择题, 共 90 分)

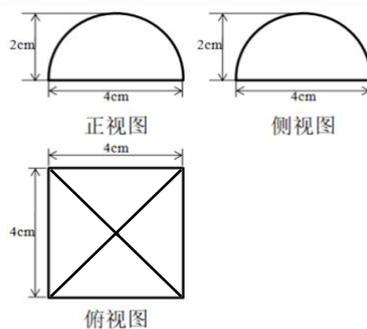
二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y \leq 2 \\ x + 3y \leq 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$, 则 $2x + y$ 的最大值为 _____

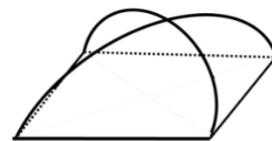
14. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 直线 l 过 C 的焦点 F 与 C 交于点 A , 与 y 轴交于点 B , 且 F 在线段 AB 上. 若 $|AF| = 2|BF|$, 则 l 的倾斜角为 _____

15. 已知 α 是第四象限角且 $\cos(\alpha + 60^\circ) = \frac{\sin^2 20^\circ}{\tan 10^\circ \sin 50^\circ}$, 则 $\cos \alpha =$ _____

16. 《缀术》是中国南北朝时期的一部算经, 汇集了祖冲之和祖暅父子的数学研究成果, 在唐代被收入《算经十书》, 成为唐代国子监算学课本. 在此书中, 他们提出了著名的“祖暅原理”, 即两个平行平面间的两个几何体, 被任意平行于这两个平面的平面所截, 若两个截面的面积恒相等, 则这两个几何体的体积相等. 利用此原理, 祖氏父子解决了刘徽遗存下来的所谓“方圆相缠, 浓纤诡互, 不可等正”的牟合方盖的体积的问题, 进而推导出了正确的球体体积公式. 如右图, 图(a)所示为半个牟合方盖的三视图, 其中正视图与侧视图均为半圆形, 俯视图为正方形; 图(b)所示为其直观图. 根据以上材料, 可以计算出右图所示几何体的体积为 (单位: cm^3) _____



图(a)



图(b)

三、解答题: 本题共 7 小题, 共 70 分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $c = \sqrt{5}$, $a^2 = \sqrt{5}b + 5$, $\sin C = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

- (I) 求 $\cos A$ 的值;
- (II) 求 AC 边上的中线的长度.

18. (本小题满分 12 分)

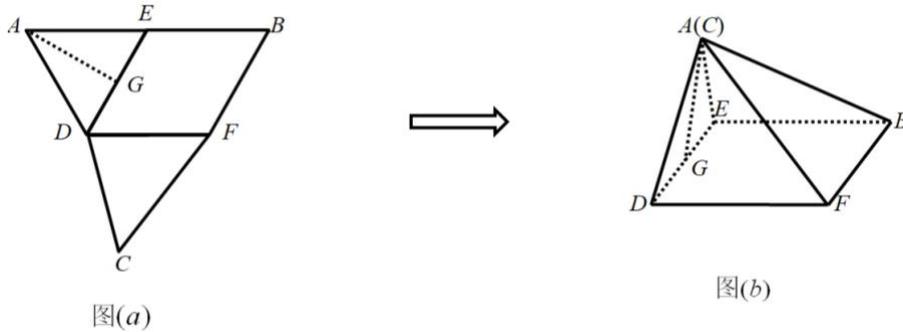
甲同学参加了一次社区活动, 其中有一项趣味游戏, 其规则如下: 一个幸运转盘被等分为 A, B, C 三个区域, 每次转动转盘时指针指向 A, B, C 三个区域的概率均相等, 且与转动转盘的次序无关; 每轮游戏包括转动转盘三次, 每次转动若指针指向 A 区域则视为此次“成功”; 每轮游戏结束后, 若只有一次“成功”记 1 分, 只有连续两次“成功”记 2 分, 有连续三次“成功”记 3 分, 其余情况不得分. 经过若干轮游戏后统计各参与者的得分并按照排名分发纪念小礼品.

- (I) 已知甲同学进行了两轮游戏总计得 2 分, 求他在这两轮游戏中有一轮未得分的概率;
- (II) 记 X 为进行只一轮游戏后的得分, 求随机变量 X 的分布列与期望.

19. (本小题满分 12 分)

图(a)是由等边三角形 ADE , 菱形 $BEDF$ 和等腰三角形 CDF 组成的一个平面图形, 其中 $AD = CD = EF = 2$, $CF = \sqrt{6}$. 将其沿 DE, DF 折起使得 AC 与 AD 重合, 连接 AB , 如图(b).

- (I) 已知平面 ABF 与平面 ADE 的交线为 l , 证明: $FG \perp l$;
 (II) 求二面角 $D - AF - G$ 的正切值.



20. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , A, B 为 C 上位于 x 轴异侧的两点, 过 A, B 两点作 C 的切线分别为 l_1, l_2 , l_1, l_2 又分别与抛物线 C 的准线交于点 M, N . 已知 A, F, N 三点共线.

- (I) 证明: B, F, M 也三点共线;
 (II) 求 ΔAFB 面积的最小值以及当 ΔAFB 面积取得最小值时直线 AB 的方程.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{2 \ln x}{x+1}$.

- (I) 求 $f(x)$ 的单调区间;
 (II) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 讨论关于 x 的方程 $\frac{a}{2} \ln \left(\frac{ax+1}{e^x} \right) + \frac{ax+2}{e^{x+1}} = 1$ 的解的个数.

请考生在第 22, 23 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 + x + y = 0$. 已知点 P 为曲线 C_2 一动点, 点 Q 在射线 OP 上且满足 $|OP| \cdot |OQ| = 4$.

- (I) 求曲线 C_1 与 Q 点轨迹的直角坐标方程;
 (II) 已知点 M 为曲线 C_1 上的动点, 求 $|QM|$ 的最小值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知 a, b, c 为正数, 且满足 $a + b + c = 1$.

- (I) 证明: $ab + ac + bc \leq \frac{1}{3}$;
 (II) 若 $\lambda > 0$ 且 $\frac{\lambda}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$ 成立, 求 λ 的取值范围.