2019 级高中毕业班第二次诊断性检测模拟试题

数 学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分，第Ⅰ卷(选择题)1 至 2 页，第Ⅱ卷(非选择题)3 至 4 页，共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡的相应位置上。
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
3. 答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后，只将答题卡交回。

第Ⅰ卷(选择题, 共 60 分)

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合$A=\{-1,0,1,2,4,9\}$, 集合$B=\{y|y=x^2-2,x\in A\}$.则集合$A\cup B$中元素个数为

(A) 2 (B) 3 (C) 8 (D) 9

2. 已知复数z满足$\big||z-2i|-|z+2i|\big|=2$（$i$为虚数单位）, 则$|z|$的最小值为

(A) 1 (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $2\sqrt{3}$

3. 已知α,β为空间中两个不同的平面, a,b为两条直线, 则下列判断一定正确的是

(A) 若$\alpha\perp\beta$且$a\perp\alpha$, 则a与β不可能只有一个交点

(B) 若$a\perp\alpha$, $b\perp\beta$且平面α与平面β不垂直, 则a不平行于b

(C) 若$a\subseteq\alpha$, $b\subseteq\alpha$且$a\parallel\beta$, $b\parallel\beta$, 则$a\parallel b$

(D) 若$a\subseteq\alpha$, $b\subseteq\beta$且$a\perp b$, 则$\alpha\perp\beta$

4. 正态分布概念是由法国数学家棣莫弗(Abraham de Moivre)于1733年首次提出的, 后由德国数学家高斯(Johann Carl Friedrich Gauß)率先将其应用于天文学研究, 故正态分布又叫高斯分布. 正态分布是一个在数学、物理及工程等领域都非常重要的概率分布, 在统计学的许多方面有着很大的影响.对于服从正态分布的随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 其概率密度函数为$\varphi_{\mu,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.阅读以上材料, 可计算出积分$\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx$的值为

(A) $\sqrt{2\pi}$ (B) $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ (C) $\sqrt{\pi}$ (D) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

5. 已知箱子中有4个红球, 3个白球, 2个绿球, 所有球除颜色之外均相同.某同学从箱子中随机取出两个球, 已知他取出的球中有红球, 则他取出的球中有绿球的概率为

(A) $\frac{2}{11}$ (B) $\frac{4}{13}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{2}{5}$

6. 已知某圆锥的侧面展开图为半圆形, 其内切球（与圆锥的底面与侧面均相切的球）的半径为1, 则该圆锥的体积为

(A) π (B) $\sqrt{3}\pi$ (C) 3π (D) 9π

7. 已知函数$f(x)=2\sin x+\cos x$的一个极值点为$x=\theta$, 则$\frac{\sin 2\theta+\tan(\theta+\pi)}{2+\cos 2\theta}$的值为

(A) 2 (B) -2 (C) 2 或 -1 (D) -2 或 1

8. 已知实数x,y满足约束条件$\begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ x^2-2y\le 4 \\ x\ge 0 \end{cases}$, 记$\frac{y}{x-4}$的最小值为$m$, 最大值为$n$, 则$m-n$的值为

(A) $\frac{5\sqrt{3}}{3}-4$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}$ (C) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{4}$

9. 已知随机变量X的分布列如下表, 其中a,b为实数

X	1	2	3
P	a	$\frac{1}{2}$	b

若a,b取不同的值时, 随机变量X的方差$D(X)$存在最大值，且当$D(X)$取得最大值时随机变量$2X+1$的期望$E(2X+1)=n$.则二项式$(2x-1)^n$的展开式中, x^2项的系数为

(A) -40 (B) 60 (C) -84 (D) 24

10. 已知函数$f(x)=A\cdot\sin(\omega x+\varphi)(A\in\mathbf{R},\omega>0,|\varphi|\le\frac{\pi}{4})$对于任意$x\in\mathbf{R}$有$f(\pi-x)=f(\pi+x)$. 若$f(x)$在区间$(-\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3})$上为单调函数, 则$\omega$的取值范围为

(A) $(0,\frac{2}{3}]$ (B) $[\frac{1}{4},\frac{2}{3}]$ (C) $(0,\frac{1}{3}]$ (D) $[\frac{1}{2},\frac{1}{3}]$

11. 已知抛物线$C:y^2=2px\ (p>0)$, 其焦点为F, 准线为l. 过F的直线与抛物线C交于A,B两点, 点D为直线l上一点. 若ΔABD为等腰直角三角形, 则其直角边的长度为

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}p$或$\frac{25}{16}p$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}p$或$\frac{25}{8}p$ (C) $\sqrt{2}p$或$\frac{25}{16}p$ (D) $\sqrt{2}p$或$\frac{25}{8}p$

12. 已知定义在$\mathbf{R}$上的可导函数$f(x)$对于任意$x\in\mathbf{R}$满足$\ln\left(f(x)\right)+f(x)-x=0$恒成立. 给出以下结论：

①$y=\ln x+x$与$y=f(x)$的图像存在两个不同的交点；

②记$f(x)$的导函数为$f'(x)$, 则对于任意$x\in\mathbf{R}$满足$f'(x)=\frac{1}{1+e^{f(x)+x}}$;

③等式$e^{f(x)-x}-x=e^{f(x)-2}-2$当且仅当$x=2$时成立；

④已知$h(x)=\frac{f(x)}{x-1}$, 则$h(x)$在$x\in(1,+\infty)$上的最小值为$\frac{e^2}{e^2+1}$.

则上述结论错误的个数为

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 已知等差数列$\{a_n\}$中,$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且$a_1\cdot a_3+1=2a_2, S_3=15$,则等差数列$\{a_n\}$的公差为________

14. 已知函数$f(x)=-\sin(x\cdot\cos x)$在点$(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right))$处的切线为$l$,则$l$在$y$轴上的截距为________

15. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1,E为C_1D_1中点,F为CC_1中点.若点P在平面A_1EF上,则$\overrightarrow{PB_1}\cdot\overrightarrow{PC_1}$的最小值为________

16. 已知$a>0,b>0$,且满足$4a^2+b^3=8a^2b^2$,则$4a+b$的最小值为________

三、解答题: 本题共 7 小题,共 70 分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

可乐,是指有甜味、含咖啡因但不含酒精的碳酸饮料. 可乐是否影响健康是很多人都极为关心的话题,多年以来科学家之间争论不休. 某研究性学习小组为了研究青少年长期喝可乐是否与体重超标有关,随机对200名青少年进行了调查,调查汇总成的2×2列联表如下:

	长期喝可乐	不长期喝可乐	合计
体重超标	a	b	150
体重未超标	c	d	50
合计	100	100	200

(Ⅰ)该小组希望引入随机变量$W=\left|\frac{a}{a+b}-\frac{c}{c+d}\right|$来判断青少年长期喝可乐是否与体重超标有关,即当$W\geq w_0$时,有不小于99%的把握可判定青少年长期喝可乐与体重超标有关. 根据参考数据与参考公式,计算w_0的最小值;

(Ⅱ)已知$a=86,c=17$,试根据第(Ⅰ)问中的结论计算说明是否有不小于99%的把握可判定青少年长期喝可乐与体重超标有关. 谈谈你对此调查结果的看法.

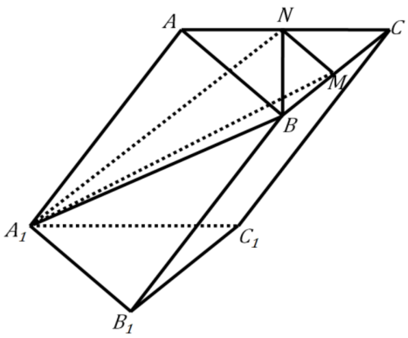
参考公式: $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$,其中$n=a+b+c+d$;$W^2=K^2\cdot\frac{(a+c)(b+d)}{n(a+b)(c+d)}$

参考数据:

$P(K^2\geq k_0)$	0.1	0.01	0.001
k_0	2.706	6.635	10.828
$\sqrt{k_0}$	1.645	2.576	3.291

$\sqrt{2}\approx 1.414$,$\sqrt{6}\approx 2.449$

18. (本小题满分 12 分)



如右图,已知在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,底面$\Delta A_1B_1C_1$为等边三角形,$AB=2$,$AA_1=\sqrt{7}$,平面$ACC_1A_1\perp$平面ABC,且此三棱柱的体积为3. 点M为BC中点,点N为AC中点.

(Ⅰ)求证:A_1N, B_1M, CC_1三条直线相交于同一点;

(Ⅱ)求锐二面角$B-A_1N-M$的余弦值.

19. （本小题满分 12 分）

在ΔABC中，已知$BC=4, AB=AC+2$，D是边BC上的一点，且$BD=1$.

（Ⅰ）若$AD\perp AC$，求ΔABC的周长；

（Ⅱ）若ΔACD是钝角三角形，求$\frac{AD}{AC}$的取值范围.

20. （本小题满分 12 分）

已知椭圆$C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$，其左右焦点分别为F_1, F_2. 点A为椭圆C上一点，直线AF_1与椭圆C交于另一点M，直线AF_2与椭圆C交于另一点N.

（Ⅰ）已知$\overrightarrow{AF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1M}, \overrightarrow{AF_2}=\mu\overrightarrow{F_2N}$，当$AF_1\perp x$轴时，求$\lambda+\mu$的值；

（Ⅱ）求ΔAMN面积的最大值.

21. （本小题满分 12 分）

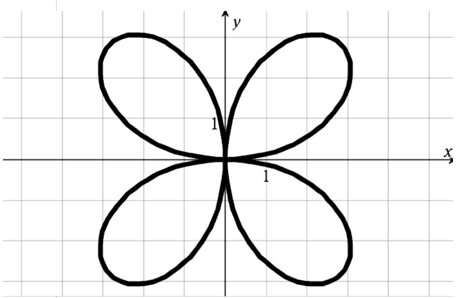
已知函数$f(x)=(x-1)\ln x\ ,g(x)=(x-1)^2-x\cdot\ln^2 x$.

（Ⅰ）已知$x>0$，求$g(x)$的最小值；

（Ⅱ）已知$0<a<b$且满足$f(a)=f(b)$，求证：$b-a<\ln b-\ln a$.

请考生在第 22，23 题中任选择一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分. 作答时，用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. （本小题满分 10 分）选修 4−4：坐标系与参数方程



数学是自然的，是美丽的. 在西方，人们通常认为找到四叶草是好运的象征，而在数学中也有类似的优美曲线存在，四叶玫瑰线就是一种（如右图）. 已知平面直角坐标系xOy中，曲线C_1的方程为$(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=4$. 以坐标原点$O$为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系，四叶玫瑰线$C_2$的极坐标方程为$\rho=4\sin 2\theta$.

（Ⅰ）求曲线C_1的极坐标方程与四叶玫瑰线C_2的直角方程；

（Ⅱ）判断曲线C_1与四叶玫瑰线C_2的交点个数，并说明理由.

23. （本小题满分 10 分）选修 4−5：不等式选讲

已知实数$a,b,c>0$，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\lambda$（$\lambda$为常数且$\lambda>0$）.

（Ⅰ）当$\lambda=1$时，求$a+b+c$的最小值；

（Ⅱ）若μ为常数且$\mu>0$，求证：$\frac{1}{a+\mu}+\frac{1}{b+\mu}+\frac{1}{c+\mu}\le\frac{3\lambda}{\lambda\mu+3}$.