工作秘密 严禁外传
擅自泄露 严肃追责

2019 级高中毕业班第一次诊断性检测模拟试题

数　学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分，第 I 卷(选择题)1 至 2 页，第 II 卷(非选择题)3 至 4 页，共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡的相应位置上。
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
3. 答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后，只将答题卡交回。

第 I 卷(选择题, 共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合$A=\{(x,y)|\ln(x+y)=2\ln x\}$,集合$B=\{(x,y)|x=y-1\}$.则集合$A\cap B$中元素个数为

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 无数个

2. 已知复数z满足$|z+2\bar{z}+i|=\sqrt{10}$ (i为虚数单位), 则z可以是

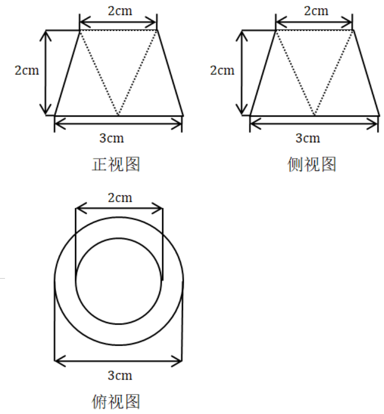
(A) $1-2i$　　(B) $1-i$　　(C) $1+i$　　(D) $1+2i$

3. 某班级在第一学期统计了该班每个同学身高的平均数$\bar{x}_1$,极差d_1和方差s_1^2.若在第二学期又有一名其他班同学转入该班,其余同学身高与班级无变动,再次统计该班每个同学身高的平均数$\bar{x}_2$,极差d_2和方差s_2^2.则下列说法正确的是

(A) 若$\bar{x}_1\neq\bar{x}_2$,则$d_1\neq d_2$　(B) 若$d_1\neq d_2$,则$\bar{x}_1\neq\bar{x}_2$　(C) 若$s_1^2\neq s_2^2$,则$d_1\neq d_2$　(D) 若$d_1\neq d_2$,则$s_1^2\neq s_2^2$

4. 已知实数x,y满足约束条件$\begin{cases}x+y-3\leq 0\\ x-y+3\geq 0\\ y\geq 0\end{cases}$,则$z=x^2+y$的最大值为

(A) 1　　(B) 3　　(C) 9　　(D) 18



5. 某工件三视图如右图所示,则其体积（单位：cm^3）为

(A) $\frac{5}{2}\pi$　　(B) $\frac{19}{6}\pi$　　(C) $\frac{23}{6}\pi$　　(D) $\frac{9}{2}\pi$

6. 已知命题p：$\forall x,y\in\mathbf{R},|\sin x-\sin y|\le|x-y|$,命题$q$：若$\alpha,\beta$为锐角三角形中的两个不同内角,则$\sin\alpha>\cos\beta$．则下列命题为真命题的是

(A) $p\wedge q$　(B) $(\neg p)\wedge q$　(C) $p\wedge(\neg q)$　(D) $\neg(p\vee q)$

7. 已知空间四面体$ABCD$中,$AD=2,AC=2,BC=2\sqrt{2},BD=4$且$AD\perp BC$.则直线$AC$于$BD$的夹角为

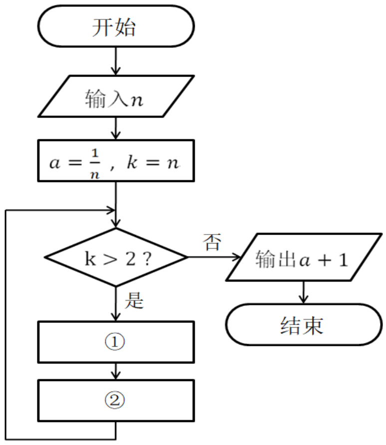
(A) 30°　(B) 45°　(C) 60°　(D) 90°

8. 某次理科综合测试中,某选择题有5个选项,其中有2个错误选项和3个正确选项.该选择题的评分标准如下：选择一个正确选项得3分,选择两个正确选项得4分,选择三个正确选项得5分;每选择一个错误选项扣3分;最低得分为0分,满分为5分.已知某同学由于准备不充分,该题只能采取随机选择的方式,若该同学想要使期望得分最大,则他应该随机选择选项的个数为

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

9. 已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是非零平面向量,$|\boldsymbol{a}|=1$且$|\boldsymbol{b}|^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-5=0$.若向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$,则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$的值为

(A) $\frac{\sqrt{33}-1}{4}$　(B) $\frac{\sqrt{33}+1}{4}$　(C) $\frac{\sqrt{33}-1}{2}$　(D) $\frac{\sqrt{33}+1}{2}$



10. 已知无限连分数$s=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cdots}}}=1.433127\cdots$.右图是计算$s$近似值的一个程序框图.则在下列选项中,右图中的①,②分别应填入

(A) $k=k+1$和$a=\frac{1}{k+a}$　(B) $k=k-1$和$a=\frac{1}{k+a}$

(C) $a=\frac{1}{k+a}$和$k=k+1$　(D) $a=\frac{1}{k+a}$和$k=k-1$

11. 已知抛物线$C:y^2=4x$,其焦点为F,准线为l.点A是抛物线C上一点,过点A作抛物线C的切线l_{AB}交准线l于点B,则ΔABF面积的最小值为

(A) $\frac{8\sqrt{3}}{9}$　(B) $\frac{3\sqrt{6}}{4}$　(C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　(D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

12. 生态学的研究常常与数学有紧密的联系.在自然界中,由于环境资源的有限,种群数量不可能无限增长,而是随着种群数量的增大而逐渐趋于稳定.在数学中可以用S型增长曲线来反映种群数量与时间之间的如下函数关系.已知函数$f(t)=\frac{K\cdot e^{r\cdot t}}{e^{r\cdot t}+c\cdot K},t\in[0,+\infty)$,其中$K$为环境容纳量,$r$为增长系数,$e$为自然对数的底数,$c$与种群的初始数量$n_0$有关,即$f(0)=n_0$.已知$K,r,n_0$均为大于零的常数,$f(t)$的导函数为$f'(t)$.给出以下几个结论：

① 对于$\forall t\in[0,+\infty)$,$f(t)<K$恒成立;

② 随着t从0开始不断增大至正无穷,$f(t)$的函数值先增大后减小;

③ 随着t从0开始不断增大至正无穷,$f'(t)$的函数值先增大后减小;

④ 若$f(t_0)=\frac{K}{2}$,则$f'(t)\le f'(t_0)$恒成立;

则上述结论错误的个数为

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

第Ⅱ卷(非选择题, 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 已知$\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}=2$,则$\sin\theta=$_________

14. 已知双曲线C_1与双曲线C_2的渐近线重合, 且双曲线C_1的离心率为e, 则双曲线C_2的离心率为_________

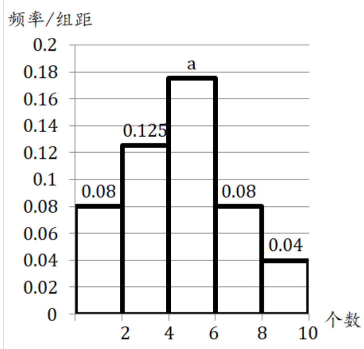
15. 多项式$\frac{(x+1)^9}{x}+\frac{2(x+1)^9}{x^2}+\cdots+\frac{8(x+1)^9}{x^8}+\frac{9(x+1)^9}{x^9}$的常数项的值为_________(用数字作答)

16. 已知函数$f(x)=\frac{x^2+1}{x\cdot\ln x}$的导函数为$f'(x)$, 函数$g(x)=x\cdot f'(x)$. 若$a=g(\log_3 4), b=g(\log_4 5), c=g(\log_5 3)$, 则将$a,b,c$按值由大到小排序的结果为_________

三、解答题: 本题共 7 小题, 共 70 分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

钥匙已经成为人们生活越来越不可或缺的物品. 某研究性学习小组随机调查某小区的100名住户的钥匙拥有个数, 其调查得到的频率分布直方图如右图所示.



(Ⅰ) 求a的值;

(Ⅱ) 根据频率分布直方图,估计该小区住户的平均钥匙拥有个数(同一组的数据用该组的中点值作为代表);

(Ⅲ) 已知某住户拥有5把不同钥匙,其中有且只有一把钥匙可以开门,但是当他要开门时却忘记了对应的钥匙.若他每次都用与之前不同的钥匙尝试开门,记打开门之前的尝试次数(包括打开门的那次尝试)为ξ.求ξ的分布列与方差$D(\xi)$.

18. (本小题满分 12 分)

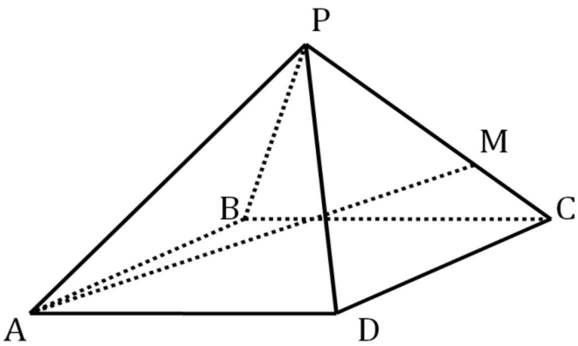
已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=\sqrt{2}$, 记数列$\{a_n\}$的前n项积为b_n. 已知对于$n\in\mathbf{N}^+$, $a_{n+1}^2=1+\frac{4}{b_n^2}$恒成立.

(Ⅰ) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(Ⅱ) 定义$[x]$为不超过x的最大整数,如$[1.3]=1$, $[2]=2$等.已知$c_n=n[a_n^2]$,求数列$\{c_n\}$的前n项和S_n的通项公式.

19. (本小题满分 12 分)

如右图, 四棱锥$P-ABCD$的底面$ABCD$为菱形, 且$AB=2$. 已知$\angle BAP=\angle DAP$, 且平面$BAP\perp$平面DAP.



(Ⅰ) 从下面①②③三个条件中选取两个条件补充到已知条件中, 然后证明另外一个成立;

①$AP=2\sqrt{2}$　②$PB\perp CD$　③$\angle BAD=60^\circ$

注: 如果选择不同的组合分别解答,按第一个解答计分

(Ⅱ) 在(Ⅰ)的条件下,已知M为线段PC上一点(不含端点),求直线PB与平面AMD所成角度的取值范围.

20. (本小题满分 12 分)

已知函数$f(x)=2x-a\ln x-b$, $x\in(1,+\infty)$. 其中a,b为常数且$a,b\in\mathbf{R}$. 已知当b恒定时,始终存在a,使得$f(x_1)=f(x_2)=0\ (x_1\neq x_2)$.

(Ⅰ)求b的取值范围;

(Ⅱ)求证:$x_1x_2<(a-1)^2$.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆$C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,斜率为1的直线$l$与椭圆$C$的交点为$A,B$,且$|AB|$的最大值为$2\sqrt{2}$.

(Ⅰ)求椭圆C_1的标准方程;

(Ⅱ)已知圆C_2的方程为$x^2+y^2=r^2\ (r^2<a^2)$,点P在椭圆C_1上.过点P作圆C_2的两条切线l_1,l_2(直线l_1,l_2的斜率存在且不为零),分别于椭圆交于不同于点P的M,N两点,记直线l_1,l_2的斜率为k_1,k_2.已知k_1k_2恒为定值.

① 求r的值;

② 求ΔPMN面积的最大值.

请考生在第 22,23 题中任选择一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分. 作答时,用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

数学中有很多优美的曲线,有着美好的寓意,星形线就是其中的一种.已知星形线C的参数方程为$\begin{cases}x=\cos^3\theta\\ y=\sin^3\theta\end{cases}$.

(Ⅰ)求星形线C的直角坐标方程;

(Ⅱ)若过原点的直线l交星形线C与A,B两点,求$|AB|$的取值范围.

23. (本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

已知函数$f(x)=|3-x|+|3+x|$的最小值为m.

(Ⅰ)求m的值;

(Ⅱ)已知$a,b>0$,且$a+b=m$.求$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$的最小值.