2019 级高中毕业班第一次诊断性检测模拟试题

数　学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分，第 I 卷(选择题) 1 至 2 页，第 II 卷(非选择题) 3 至 4 页，共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡的相应位置上。
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
3. 答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后，只将答题卡交回。

第 I 卷(选择题, 共 60 分)

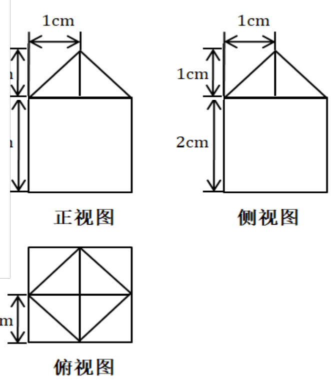
一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 球坐标系中的点P的球坐标为$(2,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$,则其在相应的空间直角坐标系中的直角坐标为

(A) $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},1)$　　(B) $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3})$　　(C) $(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1)$　　(D) $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3})$

2. 欧拉公式是欧哈德·欧拉在1948年于他的著作《无穷小分析引论》中正式提出的,是数学界最美丽的公式之一.它可以表示为以下恒等式:$e^{i\theta}=\cos\theta+i\cdot\sin\theta$,其中,i为虚数单位,e为自然对数的底数,θ是以弧度制表示的角度.欧拉公式在数学,物理学等领域中应用广泛,被誉为 “数学王子”的高斯曾这样评价过这个公式:“一个人第一次看到这个公式而不感到它的魅力,他不可能成为数学家.”已知复数$z=1+\sqrt{3}i$（i为虚数单位）.若$z^{2022}=a+bi$,则根据上述材料,可计算出$a+b$的值为

(A) 2^{2022}　　(B) $-2^{2021}-2^{2021}\sqrt{3}$　　(C) 0　　(D) $2^{2021}-2^{2021}\sqrt{3}$



3. 已知二进制数$a=101101_{(2)}$,三进制数$b=1211_{(3)}$.则$a+b$在四进制下表示为

(A) $1132_{(4)}$　　(B) $1122_{(4)}$　　(C) $1312_{(4)}$　　(D) $1231_{(4)}$

4. 空间中某几何体由正方体与正四棱锥组成，其三视图如右图所示，则其体积（单位：cm^3）为

(A) $\frac{26}{3}$　　(B) 10　　(C) $\frac{28}{3}$　　(D) 12

5. 若随机变量ξ服从二项分布$B(n,\frac{1}{2})$,且随机变量ξ的数学期望$E(\xi)=2$,则$(x+2)^n$的展开式中的二项式系数之和为

(A) 81 (B) 16 (C) 32 (D) 27

6. 已知某函数$f(x)$在其定义域$\mathbf{D}$上连续,其导函数为$f'(x)$.若$x_0\in\mathbf{D}$,则“$f'(x_0)=0$”是“x_0是$f(x)$的一个极值点”的

(A) 充要条件 (B) 充分不必要条件 (C) 必要不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 若实数x,y满足约束条件$\begin{cases}x+y-3\le 0\\ x-y+3\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$,则自然数$z=2y-x$的不同取值的个数为

(A) 4 (B) 7 (C) 10 (D) 16

8. 若函数$f(x)=\left(2+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{1-x}\right),x\in(0,1)$,则$f(x)$的最小值为

(A) 12 (B) $8+4\sqrt{2}$ (C) $7+2\sqrt{6}$ (D) $3+8\sqrt{3}$

9. 已知箱子中有3个红球, 2个白球. 每次随机从箱子里取一个球, 记录结果并将其放回. 则事件“取四次后取到过每个红球”的概率为

(A) $\frac{84}{625}$ (B) $\frac{24}{125}$ (C) $\frac{6}{125}$ (D) $\frac{216}{625}$

10. 某数学研究小组最近在课余时间研究了函数的一些性质.定义某函数$f(x)$在其定义域$\mathbf{D}$上的“中值直线”为$y=a$,其中a的值由以下方法计算：首先在定义域$\mathbf{D}$上均匀地取若干个值,然后代入函数计算每个值所对应的函数值,最后取所有计算出的函数值的平均值记为a_0.当取值的个数趋近于无限个时,将此时a_0的值记为a.该小组计算了以下函数的“中值直线”:

①$f(x)=x,x\in[-1,3]$ 的“中值直线”是$y=2$;

②$f(x)=\sin x,x\in[-1,1]$ 的“中值直线”是$y=0$;

③$f(x)=\ln x,x\in[1,e]$ 的“中值直线”是$y=\frac{1}{e+1}$;

④$f(x)=\sin^2 x,x\in[0,\pi]$ 的“中值直线”是$y=\frac{1}{2}$;

则以上计算正确的个数为

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

11. 在正四面体$ABCD$内,动点P到直线AB与直线CD的距离相等.若某平面α与直线AB和直线CD平行,且与正四面体$ABCD$有交点,则动点P在平面α上的轨迹可能为

(A) 椭圆或其一部分 (B) 圆或其一部分 (C) 双曲线的一部分 (D) 一个点

12. 已知$f(x)=x^9+x^4e^x,g(x)=m\cdot e^{2x}+4x^8\ln x$.若对于任意$x\in(0,+\infty)$,恒有$f(x)<g(x)$.则$m$的取值范围为（$e$为自然对数的底数,$e\approx 2.718281828\cdots$）

(A) $(\frac{1+e}{e^2},+\infty)$ (B) $(\frac{e^2}{8},+\infty)$ (C) $(e-1,+\infty)$ (D) $(1,+\infty)$

第Ⅱ卷(非选择题, 共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 已知集合$A=\{-1,0,1,2,3\}$,集合$B=\{a,a^2,a+1,3a\}$,其中$a\in\mathbf{R}$.定义集合$M=A\cap B$,则M的非空真子集个数的最大值为________（用数字作答）

14.　已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为$F_1,F_2$, P为椭圆上一点．若ΔPF_1F_2恰为等腰直角三角形，则椭圆C的离心率为________

15.　已知函数$f(\theta)=\frac{|\cos\theta-\sqrt{3}|}{\sqrt{5+2\sin\theta-2\sqrt{3}\cos\theta}}$的定义域为**R**,则其值域为________

16.　在ΔABC中，a,b,c分别为内角A,B,C的对边.已知$a=1,b^2=2\sqrt{2}ac,C=\frac{\pi}{4}$,则满足条件的不同三角形个数为________

三、解答题：本题共 7 小题，共 70 分．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.　(本小题满分 12 分)

近年来，我国5G建设不断推进．2022年1月，工业和信息化部发布的《2021年通信业统计公报》显示截至2021年底，我国累计建成并开通5G基站142.5万个，总量占全球60%以上，每万人拥有5G基站数达到10.1个． 5G将大幅推动移动通信技术产业的重大飞跃，并将与工业、交通、医疗等行业深度融合，催生工业互联网、车联网等新业态．某调查机构随机抽取了100人，调查了他们对5G建设的了解程度，并将了解程度分为“比较了解”和“不了解”两类，结果如下表：

年龄/岁	[15,25)	[25,35)	[35,45)	[45,55)	[55,65)	[65,75)
“比较了解”的人数	5	10	20	10	5	5
抽取人数	10	15	30	25	10	10

（Ⅰ）若以年龄45岁为分界点,由上述统计数据完成下面的2×2列联表,并利用参考公式与参考数据判断是否有99%的把握认为对5G建设的了解程度与年龄有关；

	年龄低于 45 岁的人数	年龄不低于 45 岁的人数	合计
“比较了解”的人数			
“不了解”的人数			
合计			

（Ⅱ）若从年龄在 [15,25)的被调查人中随机抽取3人,记这3人中“比较了解”的人数为ξ,求随机变量ξ的分布列与期望.

参考公式：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$，其中$n=a+b+c+d$

参考数据：$P(K^2\geq2.706)\approx0.10$　$P(K^2\geq6.635)\approx0.010$　$P(K^2\geq10.828)\approx0.001$

18.　(本小题满分 12 分)

已知等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=1$,记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和,数列$\{b_n\}$为等比数列.首先从以下五个条件中选择两个补充到已知条件中,然后回答问题.

①$2S_n={a_n}^2+a_n$　②$b_2=2a_2$　③${b_n}^2=2b_{2n-1}$　④$S_4=2a_5$　⑤$\log_2 b_n=a_n$

注：如果选择不同的组合分别解答,按第一个解答计分

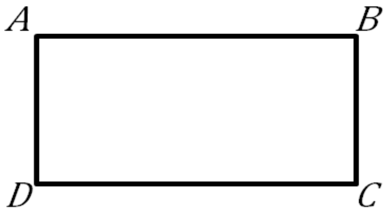
（Ⅰ）求$\{a_n\},\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若对于数列$\{c_n\}$,令$c_n=\frac{{a_n}^2}{b_n}$.记T_n为数列$\{c_n\}$的前n项和.若对于任意正整数n,都有$T_n<m$ $(m\in Z)$.求m的最小值.

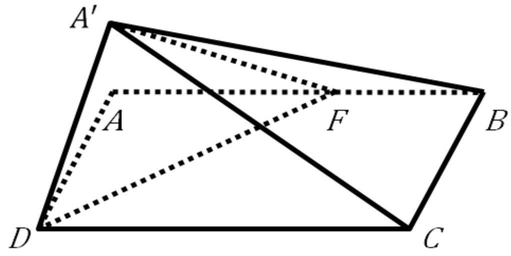
19.　(本小题满分 12 分)

如图甲，在矩形$ABCD$中，已知$AB=2,BC=1$，F是线段AB上的一点（不含端点）．将ΔADF沿DF折起，使点A到达A'的位置，且使平面$A'CD\perp$平面$ABCD$，连接$A'B$，$A'C$，得到如图乙所示

的四棱锥$A'-BCDF$.



图甲



图乙

（Ⅰ）是否存在点F,使得$A'B\perp A'D$?若存在,求出此时$A'C$的长度;若不存在,请说明理由;

（Ⅱ）已知平面$A'DF$与平面$A'BC$的交线为l.求证:二面角$C-l-D$恒为钝角.

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,直线$x+2\sqrt{3}y-4=0$与椭圆$C$切于点$(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$.

（Ⅰ）求椭圆C的标准方程;

（Ⅱ） 已知直线l与椭圆C交于A,B两点,线段AB的中点为Q,点P的坐标为$(1,\frac{1}{2})$.记直线AP,BP的斜率分别为k_1,k_2,已知$k_1\cdot k_2=-\frac{1}{4}$.则在直线$y=\frac{1}{4}$上是否存在两定点$E,F$,使得$|EQ|+|FQ|$恒为定值?若存在,求出定点$E,F$的坐标;若不存在,请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知$f(x)=\frac{x\cdot\ln x}{\ln x-t}$.其中,t为常数,且$t>0$.

（Ⅰ）当$t=1$时,求$f(x)$的单调区间;

（Ⅱ）若$f(x)$存在两个极值点,分别记为x_1,x_2.求证:$\sqrt{\frac{f(x_1)}{f(x_2)}}+\sqrt{\frac{f(x_2)}{f(x_1)}}>2+t$.

请考生在第 22，23 题中任选择一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分. 作答时，用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分)选修 4-4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系xOy中,曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=4\cos\theta\\y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）.以坐标原点$O$为极点,$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系,点$M$在极坐标系中的坐标为$(\sqrt{2},\frac{3}{4}\pi)$,且直线$l$恒过点$M$.

（Ⅰ）求曲线C的普通方程与点M在平面直角坐标系xOy中的坐标;

（Ⅱ）设直线l与曲线C交于A,B两点.当$|MA|=3|MB|$时,求直线l的极坐标方程.

23. (本小题满分 10 分)选修 4-5：不等式选讲

已知函数$f(x)=|x+a|+2|x-a|\ (a>0)$.

（Ⅰ）当$a=2$时,求$f(x)<5$的解集;

（Ⅱ）已知$f(x)\le f(x^2)$在$x\in(0,+\infty)$上恒成立,求a的值.