工作秘密　严禁外传
擅自泄露　严肃追责

2019 级高中毕业班摸底测试模拟试题

数　学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分，第Ⅰ卷(选择题)1 至 2 页，第Ⅱ卷(非选择题)3 至 4 页，共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡的相应位置上。
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
3. 答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后，只将答题卡交回。

第Ⅰ卷(选择题，共 60 分)

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设E为双曲线的一支.l 为过 E对应焦点的一条直线，l 交 E于M、N两点.若P为线段MN的中点，则P的轨迹∈

(A) {一对相交直线}　(B) {双曲线的一部分}　(C) {抛物线，一对相交直线}　(D) {圆弧的一部分}

2. 设l_1,l_2为一对相互垂直的异面直线，则到这两条直线距离相等的点的个数为

(A) 无穷个　(B) 1　(C) 4　(D) 8

3. 若x, y, z 是非负数，则$\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{x+z}}+\sqrt{\frac{z}{y+x}}$的最小值是

(A) 2　(B) 1　(C) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$　(D) $\frac{3}{2}$

4. 不等式 $e^x+e^{-x}<xe^x+\frac{1}{xe^x}$的解集为 (e为自然对数的底数，$e\approx 2.718281828\cdots$)

(A) $(0,1)\cup(1,+\infty)$　(B) $(0,1)$　(C) $(1,+\infty)$　(D) 以上选项均不正确

5. 若$f(x)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x$,且 f(x)在$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$上单调递增，则ω的范围是

(A) $(0,\frac{2}{3}]$　(B) $[7,\frac{26}{3}]$　(C) $\left(0,\frac{2}{3}\right]\cup[7,\frac{26}{3}]$　(D) 以上选项均不正确

6. 两个焦点在x轴上的椭圆Ω、Γ的中心相同、离心率e相同.其中，椭圆Ω的长轴与椭圆Γ的长轴长度之比为$\sqrt{2}:1$.过Ω上任意一点做Γ的两条切线(切线斜率存在且不为零)，则两切线的乘积等于

(A) e^2-1　(B) $-e$　(C) $-\sqrt{e^4+1}$　(D) e^2-e

7. 在ΔABC中，a, b, c分别为三个内角A, B, C的对边，则$a+b\ge 2c$是$C\le\frac{\pi}{3}$的

(A)充要条件　(B) 充分不必要条件　(C) 必要不充分条件　(D) 既不充分也不必要条件

8. $\tan10°\tan20°+\tan20°\tan60°+\tan60°\tan10°=$

(A) 1　(B) 3tan10°　(C) 2　(D) $2\sqrt{3}$

9.青城山位于四川省成都市都江堰市西南，分为前山和后山，群峰环绕起伏、林木葱茏幽翠，享有“青城天下幽”的美誉。某同学前往青城山景区游玩，上山的路上有 15 级台阶，由于体力原因，规定每次只能向上爬 1 级，爬 2 级或爬 3 级，且不能返回. 则此人从第 1 级台阶上台阶至第 15 级台阶的不同方案数为

(A) 4460　(B) 8192　(C) 4396　(D) 3136

10. 设 $f(x)=e^x+x\cdot\ln x-k\cdot x^2$. 若$\forall x>0, f(x)>0$ 恒成立，则k的最大整数值是 (e为自然对数的底数，$e\approx 2.718281828\cdots$)

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

11. 在平面直角坐标系xOy中，封闭区域$x^2+y^2-xy\le 1$的面积是

(A) $\sqrt{2}\pi$　(B) $\frac{\sqrt{6}}{3}\pi$　(C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　(D) $\frac{4}{3}\pi$

12. 已知 $x_1,x_2\in R$ 且 $x_1x_2=a(x_1<x_2$且$a<0)$，若 $\frac{|3+a|}{\sqrt{3}}(\sin x_1-\sin x_2)\le\sqrt{3{x_1}^2+a^2}-\sqrt{3{x_2}^2+a^2}$恒成立，a的范围是

(A) $(-\infty,-3)$　(B) $(-\infty,-3)\cup(-3,-\sqrt{3}]$(C) $(-\infty,-3)\cup(-3,-1]$　(D) $(-\infty,-3)\cup(-3,0)$

第Ⅱ卷(非选择题，共 90 分)

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 若 a, b, c > 0,且满足$\begin{cases}b-c\le 2a\le 8c-4b\\ c\cdot\ln b+c\ge c\cdot\ln c+a\end{cases}$,求$\frac{2b-a}{2c}$的取值范围________

14. 若定义在$(0,+\infty)$上的可导函数 f(x)满足$x^2f'(x)+2x\cdot f(x)=\frac{e^x}{x}$,且$f(2)=\frac{e^2}{8}$,求f(x)的极值点个数________(e为自然对数的底数，$e\approx 2.718281828\cdots$)

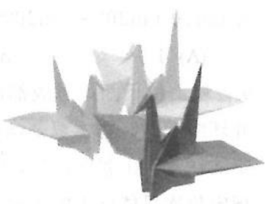
15. 记$a=\ln4-\ln3, b=\frac{1}{6\sqrt{3}-7}, c=\frac{9}{32}$.试将a, b, c从大到小排序________

16. 在平面直角坐标系xOy中,点A、B分别为椭圆C: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$的上顶点与右顶点.直线l与椭圆交于M、N两点,令O为AN与BM的交点(O在椭圆内),满足$|OM|\cdot|OB|=|OA|\cdot|ON|$.求直线l在y轴上截距的取值范围________

三、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

如右图, 折纸是一种以纸张折成各种不同形状的艺术活动. 折纸不只限于使用纸张, 世界各地的折纸爱好者在坚持折叠规范的同时, 使用了各种各样的材料. 折纸不仅可以锻炼手指的灵活性, 其作品也能给人带来美的享受. 某同学在课余时间学习了折纸, 并思考了以下数学问题. 假设四边形ABCD是矩形,将ABCD的其中一角A折起,记折痕为EF.令线段AE与底面BCD的线面角为α,线段AF与底面BCD的线面角为β,二面角$A-EF-D$为θ.



(Ⅰ) 若$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$,求θ的取值范围.

(Ⅱ) 若将题干中"矩形"改为"平行四边形",其余条件不变,求$\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}{\sin^2\theta}$的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

2020 年 9 月 22 日, 中国政府在第七十五届联合国大会上提出:"中国将提高国家自主贡献力度, 采取更加有力的政策和措施, 二氧化碳排放力争于 2030 年前达到峰值, 努力争取 2060 年前实现碳中和."某课题研究小组测定了不同时刻某一环境内的二氧化碳浓度, 发现其时间 t (单位: 小时) 与二氧化碳含量 y (单位: 千分之一) 有着某种关系, 统计数据如下表:

时间t (单位: 小时)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
CO_2含量y (单位: 千分之一)	2.4	3.5	4	3.6	2.9	1.5	0.7	0.6	1.3	2.4

进一步的研究发现, 时间 t 与二氧化碳含量 y 的关系可以用形如 $\hat{y}=\hat{a}\cdot\sin(\pi\omega t)+\hat{b}$ 的目标函数来拟合. 该小组计算了当ω取不同值时, 对应三角函数$\sin(\pi\omega t)$的近似值如下表:

时间t (单位: 小时)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
ω = 1/18	0	0.3420	0.6428	0.8660	0.9848	0.9848	0.8660	0.6428	0.3420	0
ω = 1/15	0	0.4067	0.7431	0.9511	0.9945	0.8660	0.5878	0.2079	−0.2079	−0.5878
ω = 1/12	0	0.5000	0.8660	1.0000	0.8660	0.5000	0	−0.5000	−0.8660	−1.0000
ω = 1/9	0	0.6428	0.9848	0.8660	0.3420	−0.3420	−0.8660	−0.9848	−0.6428	0

(Ⅰ) 请根据统计数据与近似值表, 从上表提供的ω中选择最适合的ω, 使目标函数的拟合效果最好, 并说明你选择的理由.

(Ⅱ) 利用(Ⅰ)中选择的ω, 根据统计数据与近似值表, 计算目标函数$\hat{y}=\hat{a}\cdot\sin(\pi\omega t)+\hat{b}$中的$\hat{a}$与$\hat{b}$.

(Ⅲ) 试利用 (Ⅱ) 中求出的目标函数与近似值表来估计当$t=20.4$ (单位: 小时) 时, 二氧化碳的含量 $\hat{y}$. ((Ⅱ)、(Ⅲ) 小问的结果均保留两位有效数字)

参考公式: 对于线性回归$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$, 其最小二乘估计公式为$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$, $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

19. (本小题满分 12 分)

对于数列$\{a_n\}$,满足$a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=\frac{1-\sqrt{1-a_n^2}}{a_n}$.

(Ⅰ) 求证: $\{a_n\}$是递减数列.

(Ⅱ) 求$\{a_n\}$的通项公式.

20. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系xOy中,椭圆Ω 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

(Ⅰ) 若点$E(x_0,y_0)$在椭圆Ω上, 直线 l过点$T(\frac{1}{7}x_0,-\frac{1}{7}y_0)$交椭圆Ω于点M、N, 且恒有$\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}=0$. 判断是否存在椭圆Ω. 若存在, 请说明理由并求Ω的离心率; 若不存在. 请说明理由.

(Ⅱ) 若点F为椭圆C的右焦点,过点F的直线与椭圆Ω于C、D两点,且椭圆Ω的上下顶点分别为A、B.求直线AC与直线BD的交点Q的轨迹.

21. (本小题满分 12 分)

设$f(x)=\frac{2\cdot\ln(ex-e)}{x-1}-a$, 且 $f(x_1)=f(x_2)=0,(x_1\neq x_2)$ (e为自然对数的底数, $e\approx2.718281828\cdots$)

(Ⅰ) 求a的取值范围.

(Ⅱ) 求证: $x_1\cdot x_2>\frac{8}{a}$

请考生在第 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分)选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系xOy中,以坐标原点O为极点,x轴的正半轴为极轴建立极坐标系.在该极坐标系中,曲线C 的极坐标方程为$\rho=\frac{2}{4+\sqrt{6}(\cos\theta+\sin\theta)}$.

(Ⅰ) 判断曲线C的轨迹,并求曲线C上的点到极点的最大值.

(Ⅱ) 若曲线C上有两点$A(\rho_1,\alpha)$、$B(\rho_2,\alpha+\frac{\pi}{2})$,求三角形AOB面积的最大值.

23. (本小题满分 10 分)选修 4-5: 不等式选讲

对于$x\in R$,令$|x+2|-|x-2|>2$的解集为M.

(Ⅰ) 求M.

(Ⅱ) 若$a,b,c\in M$,求证: $\frac{a}{\ln(ab+ac)}+\frac{b}{\ln(ab+bc)}+\frac{c}{\ln(ac+bc)}\geq e$

(e为自然对数的底数, $e\approx2.718281828\cdots$)