线性代数问题分类2

四、特征值问题

(1) 常规方法

例：若$A=\begin{pmatrix}-8 & 6 & 1\\ -9 & 7 & 1\\ -36 & 24 & 5\end{pmatrix}$，求$A$的特征值，并判断$A$是否可对角化.

(2) 利用$A\xi=\lambda\xi$、$|\lambda E-A|=0$、$(\lambda E-A)\xi=\theta$等原始公式

例：证明方阵A与A^T有相同的特征值.

例：A的各行元素之和均为2，求A的一个特征值和特征向量.

例：$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\ k\\ 1\end{pmatrix}$ 为A^{-1}的特征向量，求 k.

(3) 利用特征值关系

$$\begin{cases} A\text{的特征值为}\lambda_i\text{，则}A^{-1}, A^*\text{的特征值为 }\lambda_i^{-1}, |A|\lambda_i^{-1} \\ \mathrm{tr}(A)=\Sigma\lambda_i\text{，}\quad |A|=\Pi\lambda_i \\ f(A)\text{的特征值为 }f(\lambda_i)\text{，其中}f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0 \end{cases}$$

例：设$A,B\in \mathrm{R}^{3\times 3}$，$AB=B+E$，$A$的特征值为3,-3,0，求$B$的特征值.

例：设A为n阶矩阵，若存在正整数k使得$A^k=O$，求$|A+E|$的值.

(4) 利用特征值特征向量的性质

$$\begin{cases} 1\le \lambda\text{的无关特征向量个数}\le\lambda\text{的重数} \\ \text{不同特征值的特征向量无关} \\ n\text{阶方阵}A\text{可对角化}\Leftrightarrow A\text{有}n\text{个无关特征向量} \\ \text{实对称矩阵不同特征值的特征向量正交} \\ \text{实对称矩阵可正交对角化} \end{cases}$$

例：设3阶实对称矩阵A满足 $r(A)=2$，$A^3+2A^2=O$，求A的特征值.

例：3阶实对称矩阵A的特征值为-1,1,1 , 属于-1的特征向量$(0,1,1)^T$, 求A.

例：若 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 9 \end{pmatrix}$ ，求 $\max\limits_{x^T x=1} x^T Ax, \min\limits_{x^T x=1} x^T Ax.$

例：α,β是A的属于特征值λ_1, λ_2的特征向量,$\lambda_1\neq\lambda_2$,证明$\alpha+\beta$不是特征向量.

(5) 利用矩阵等式处理

例：n维非零列向量α, β满足$\alpha^T\beta=0$，且有$A=\alpha\beta^T$，证明A不可对角化.

例：设对称$A\in \mathbf{R}^{n\times n}$ 满足$A^2=A\neq O$, 证明有$U\in \mathbf{R}^{n\times r}$ 满足$U^TU=E$, $UU^T=A$.

(6) 对角化问题

例：判断 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&-6&2\end{pmatrix}$ 是否相似, 若相似则求P使得$B=P^{-1}AP$.

例：$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\a&4&b\\-3&-3&5\end{pmatrix}$ 有3个无关特征向量, 2为二重特征值,将矩阵对角化.

例：设$A\in \mathbf{R}^{n\times n}$ 满足$A^2-3A+2E=O$，证明A可对角化.

(7) 利用相似矩阵有相同的特征值、迹和行列式

例：若 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix}\sim B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$，求 a,b.

例：设$A,B\in \mathbf{R}^{3\times 3}$, $A\sim B$,且 $3E+2A$, $2E+B$, $E-2B$都不可逆 ,求$A_{11}+A_{22}+A_{33}$.

(8) 利用数学归纳法

例：设$A\in \mathbf{R}^{n\times n}$，证明存在同阶可逆矩阵$P$ 使得$P^{-1}AP$为上三角矩阵.

五、二次型问题

(1) 常规方法

例：设$f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$，化标准形.

(2) 利用定义

例：设$A\in \mathbf{R}^{m\times m}$ 正定, $B\in \mathbf{R}^{m\times n}$, 证明 $B^{\mathrm{T}}AB$正定的充要条件是 $r(B)=n$.

(3) 利用特征值关系

例：$f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}Ax$,正交变换$x=Py$化标准形为$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$, 求 $|3A^*-2A^{-1}|$.

例：设列向量$\alpha\in \mathbf{R}^n$，且$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha= 1$，证明 $2E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$正定.

例：设A , C为正定矩阵，且$AX+XA=C$有唯一解B，证明B对称正定.

例：设A,B对称正定，且$AB=BA$，证明AB对称正定.

(4) 利用顺序主子式

例：设 $A=\begin{pmatrix} a+3 & 1 & 2 \\ 2a & a-1 & 1 \\ a-3 & -3 & a \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 \\ 2 & -2 & 9 \end{pmatrix}$, $Ax=\theta$有非零解, B正定, 求a.

(5) 利用分块矩阵处理

例：设$A\in \mathbf{R}^{m\times m}$, $B\in \mathbf{R}^{n\times n}$都正定, 证明存在非零向量 $\xi\in \mathbf{R}^{m+n}$ 使得

$$\xi^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}\xi=0.$$

六、空间问题

(1) 求基

例：求n阶实对称矩阵构成的线性空间的基.

(2) 交空间与和空间

例：设有向量 $\alpha_1=(-2,-3,-4)^T, \alpha_2=(4,6,8)^T, \beta_1=(2,4,4)^T, \beta_2=(7,4,15)^T$. 考虑子空间$S_1=\text{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$和$S_2=\text{span}\{\beta_1, \beta_2\}$,求子空间的交$S_1\cap S_2$与和$S_1+S_2$.

例:V是n维线性空间, $\dim W_1=\dim W_2=n-1$, $W_1\neq W_2$, 证明:$\dim(W_1\cap W_2)=n-2$.

(3) 核空间与像空间

例：已知V 上线性变换T 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -12 & 2 \end{pmatrix}$，求 T的像空间与核空间的基,并将像空间与核空间的基分别扩展成 V下的基.

(4) 判定直和

例：设方程组$x_1+x_2+\ldots+x_n=0$的解空间是W_1，方程组$x_1=x_2=\ldots=x_n$的解空间是W_2，证明$\mathbf{R}^n=W_1\oplus W_2$.

七、基变换问题

(1) 过渡矩阵

例：设线性空间V的两组基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$和$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$有关系：$\alpha_1+2\alpha_2=\beta_3$, $\alpha_2+2\alpha_3=\beta_4$, $\beta_1+2\beta_2=\alpha_3$, $\beta_2+2\beta_3=\alpha_4$，求从基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵.

(2) 不同基下的坐标和变换矩阵

例：V上的线性变换T在基 $e_1=(1,0,0)^T$, $e_2=(0,1,0)^T$, $e_3=(0,0,1)^T$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$，另一组基为 $\alpha_1=2e_1+3e_2+e_3$, $\alpha_2=3e_1+4e_2+e_3$, $\alpha_3=e_1+2e_2+2e_3$，求变换T在 α_1, α_2, α_3下的矩阵B，若向量 $\beta=e_1+6e_2-e_3$，求$T\beta$在基 e_1,e_2,e_3下的坐标.

例. 已知$\mathbf{R}^3$的两组基为$\varepsilon_1=(1,0,0)^T,\varepsilon_2=(0,1,0)^T,\varepsilon_3=(0,0,1)^T$和$\alpha_1=(1,0,0)^T$, $\alpha_2=(1,1,0)^T$, $\alpha_3=(1,1,1)^T$，求在两组基下坐标相同的向量.